解説論文　地盤材料の非線形構成モデルの現状と展望

著者	飛田 善雄，新田 悠生，山口 晶
雑誌名	東北学院大学工学部研究報告
巻	52
号	1
ページ	13-27
発行年	2018-02
URL	http://id.nii.ac.jp/1204/00024115/

東北学院大学工学部研究報告
第52巻第1号・2018年 2 月

解説論文

地盤材料の非線形構成モデルの現状と展望

A review on the nonlinear constitutive model of geomaterials

飛田　善雄*　　新田　悠生**　　山口　晶*
Yoshio TOBITA　　Yuki　NITTA　　Akira　YAMAGUCHI

Abstract: The state of the art of nonlinear constitutive models of geomaterials are presented in this paper. Emphasis is placed on granular materials like sand and the elasto-plastic constitutive modeling. We first review the early development of elasto-plastic modeling of clays and sands, and then discuss the framework of internal variable theory as a basis for the phenomenological (macroscopic) nonlinear constitutive model. It is recommended that the internal variables selected for the specific constitutive model are based on physical and microscopic findings. Therefore, we discuss the micromechanical findings for granular materials for the selection and evolution of the internal variables employed in the constitutive formulation of granular materials like sand. The recent development of elasto-plastic models that take into account internal change is also discussed. We close the review with some comments on the further development of the nonlinear constitutive model toward practical use.
Keywords: constitutive model, internal variable, granular material, force chain

1 はじめに

数値解析技術の進展に呼応して、より正確に地盤材料の挙動を表現できる非線形構成モデルが提案されてきた。力学的散逸を伴う非線形挙動は、弾塑性モデルを中心に発展してきた[1,2,3]。

弾塑性モデルは、当初金属材料を対象に発展したために、岩、コンクリート、砂、粘土などの地盤材料への適用は、摩擦挙動の表現、せん断に伴う体積変化であるダイレイタンシー挙動の表現、弾性定数の拘束圧やクラックへの依存性の導入など、大幅な修正を伴って行われた。

モデルの発展に呼応して、精緻な実験が地盤材料に対して実施され、新たな挙動が発見された。例えば、異方性の影響、中間主応力の影響、主応力回転時の塑性変形挙動があげられる。

これらの影響を表現するモデルは、複雑なものとなり、そのモデルを正当に評価することは難しくなり、構成モデルの数学的枠組みが必要とされた。その要求に応えて、内部変数理論が提唱された。

内部変数理論は、数学的制約条件と熱力学的条件を基本要件として、構成モデルの数学的枠組みを与えるものである[1,4]。

本論文では、第2章において、地盤材料に対する非線形構成モデルの初期の発展を簡潔に振り返る。対象とするのは、数理的構造に優れ最も発展性の高い弾塑性モデルである。

第3章では、第2章の構成モデルの歴史に基づいて、これまで提案されたモデルを整理する意味を含めて、内部変数理論を簡潔に紹介する。広範な材料に対する内部変数理論の適用は文献[5]に詳しい。様々な工学材料の挙動の差異は、内部変数の選択とその移行則の定式化で表現されることになる。内部変数として何を選択するかは原則としては自由であるが、構成モデルを理解するためには、内部変数が微視的な観察結果に基づき、明確な物理的意味を有することが望ましい。

第4章では、砂のような粒状体の微視的挙動の観察結果を簡潔に振り返る。これらは、「粒状体の力学」と呼ばれている分野の成果であり、様々な挙動が知られている。しかし、現象論的構成モデルの内部変数の選択と移行則に用いられているのは、ごくわずかな知見である。最も大事な観察結果と

* 東北学院大学工学部教授
** 東北学院大学大学院工学研究科博士課程前期2年

考えられる、粒状体が外力に対して自発的に発生する"力の鎖"に係わる内部変数はこれまで考慮されていない。

ここで対象とするのは、材料の応力ーひずみ関係を主とする粒状体の静力学に限定している。粉体も含む広範な粒状体の挙動は文献[6]に詳しい。粒状体の静的、動的な力学挙動については、文献[7]に詳しい。

第5章では、前章での議論に基づいて、粒状体の内部構造の変化に基づく内部変数理論に基づいて、より多様な挙動を統一的に表現できるモデルを議論する。ここでの議論の基礎としたモデルは Li and Dafalias[8]である。このモデルは、砂の変形・強度の拘束圧依存性、密度依存性を、砂のような粒状体が大きなせん断の後に到達する限界状態（critical state)と現在の状態を比較して定義される状態変数（後述）を導入して、簡潔に表現するものであり、発展性を有している。Li and Dafalias らの研究グループのその後の発展も参考にして、粒状体が自発的に形成する力の鎖の運動を取り入れた新しいモデルの必要性を議論する。

第6章においては、より大きな視点から、今後の地盤材料の非線形構成モデルの発展の多様性についての議論を進める。さらに、地盤工学において高度な非線形構成モデルがその真価を発揮するために、必要とされる状況を論じる。

本文では、数学的な煩雑さを避けるために、数学的表現・式の展開は最小限にとどめる。数学的表現が説明を容易にする場合には、直交デカルト座標系を対象に、下指標を用いた指標表示を用いる。

地盤材料では、個体部分の粒子間の間隙に存在する水の圧力である"間隙水圧"が重要な役割を果たす。このために、有効応力が定義され、σ'_{ij} のように、プライムを付けて表示される。特に断りがない限り、本文での応力は全応力から間隙水圧を差し引いた有効応力を意味しており、プライムの表示は省略する。

なお、本文での引用文献は、オリジナルな論文よりも、教科書や総括報告を重視している。オリジナルな論文については、これらの成書の参考文献を参照していただきたい。

3 次元条件での一般的な応力、ひずみは σ_{ij}、ε_{ij} と表現され、平均応力は $p=(1/3)\sigma_{kk}$、体積ひずみは $\varepsilon_v=\varepsilon_{kk}$ と表現される。これらの式およびこれ以降の式では、1つの項の繰り返し指標に関する総和規約を、断りなく用いることにする。

偏差応力は $s_{ij}=\sigma_{ij}-p\delta_{ij}$、偏差ひずみは $e_{ij}=\varepsilon_{ij}-(1/3)\varepsilon_v\delta_{ij}$ で定義される。ここに、δ_{ij} は Kronecker の δ であり $\delta_{ij}=\{1\ (i=j),\ 0\ (i\neq j)\}$ と定義される。

2 地盤材料の弾塑性モデルの歴史

地盤材料のうち、クラックの形成・発展が非線形挙動を支配する岩やコンクリートを除いた、砂や粘土のような粒状材料を対象とした弾塑性モデルの発展を振り返る。

弾塑性モデルを特に重視する理由としては、以下の2つの理由を挙げることができる。

1. 数学的構造がしっかりとしている。これにより、3次元問題へのテンソル表現を用いた数学的拡張が容易になる。
2. 実際の問題への適用性が高い。実施工において、施工の順番が異なる場合には、異なる結果となる。この履歴依存性を表現するためには、履歴を表現するモデルが適切であり、それを簡潔に表現できるのが弾塑性モデルである。

同じ摩擦性の粒状材料でありながら、粘土と砂の弾塑性モデルは、全く異なる歴史をもっている。両者の見かけの挙動はかなり異なることがある。例えば、立て坑を掘ったときに、地下水が坑内に浸透し、破壊する場合に、砂の場合には「クイックサンド」と呼ばれる急激な破壊をもたらす。これに対して粘土の場合には、ゆっくりと膨張する「盤膨れ」となり、全く異なる破壊形態を取ることになる。この挙動の違いは粒状材料の中の間隙に含まれている水の排出速度、すなわち透水性によるものである。本質的な力学挙動に関しては、砂、粘土ともに、摩擦則に従い、せん断に伴い体積変化を生じるという点で同じである。

弾塑性モデルにおいて、粘土と砂が全く異なる発展をしたのは材料の本質的な差異ではなく、対象とする応力経路が異なることが主たる要因である。粘土の場合には、軟弱地盤上の盛土の挙動の様に、拘束圧とせん断力の両者が増加するような経路が主な対象となる。それに対して、砂の場合には、地震時の液状化の様に、有効拘束圧は減少し、せん断力が増加するような経路が対象となる。

盛土構築時の地盤挙動を精度よく表現するモデルが、掘削時や液状化時の挙動がまったく表現できない可能性は、利用するに際して十分に意識すべきことである。

本章では、比較的初期（1960～80年代）のモデルの発展について概観する。

2.1 粘土の弾塑性モデルの発展

粘土の弾塑性モデルは、ケンブリッジ大学の研究者らによって提案された。カムクレーモデルの詳細および応用については、文献[9]に詳しい。

カムクレーモデルは、高い含水比のもとで練り返された粘土を対象とするものであり、以下の3軸圧縮実験結果を基本として定式化された。図ー1にその概要を示す3軸圧縮試験を表現する応力パラメータとして、有効拘束圧 p ,せん断力 q、ひずみを表現するパラメータとして、体積ひずみ ε_v、せん断ひずみ γ を用いている。これらのパラメータは、最大圧縮応力、最小主応力 σ_1, σ_3、主ひずみ $\varepsilon_1, \varepsilon_3$ を用いて、以下の様に表現される。

$$p=\frac{1}{3}(\sigma_1+2\sigma_3),\ q=\sigma_1-\sigma_3,\ \eta=\frac{q}{p}$$
$$\varepsilon_v=\varepsilon_1+2\varepsilon_3,\ \varepsilon_q=\frac{2}{3}(\varepsilon_1-\varepsilon_3) \quad (1)$$

η は応力比と呼ばれる。これらは地盤力学で利用される独特の表現であるが、これらの表現は、$p\dot{\varepsilon}_v+q\dot{\varepsilon}_q=\sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}$ の関係を満たしている。すなわち、仕事速度は等しい条件のもとで定義されている。以下、本文では増分を表現する'd'ではなく、文字の頭に'・'をつける速度表現を用いて式を表示する。

カムクレーモデルで利用された挙動は以下の 3 つである。

・粘土の圧密時の挙動は、間隙比 e と有効拘束圧 p の関係：$e=e^N-\lambda_n\log_e p$ が一意的な直線的関係をもつ。

・せん断変形が進むと、初期有効拘束圧 p_0、初期間隙比 e_0 によらず、同一の状態に至り、これを限界状態と呼ぶ。限界状態で成立する式は、以下の通りである。

$$\dot{p}=0,\ \dot{\varepsilon}_v=0,\ \dot{\varepsilon}_q\neq 0 \quad (2)$$

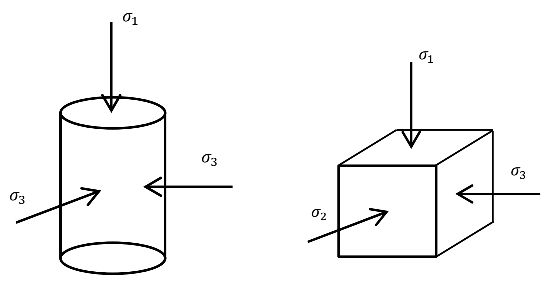


図 1.三軸圧縮状態と真の三応力状態

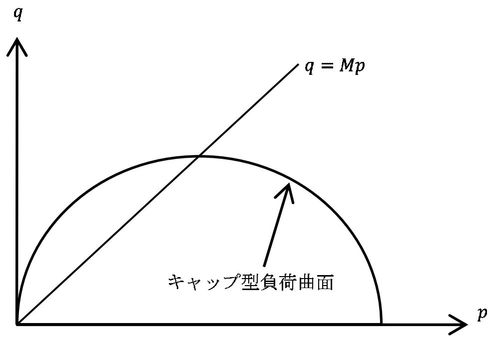


図 2.キャップ型負荷曲面

このとき、次の条件が必要条件となる。

$$\eta=M,\ e=e_c \quad (3)$$

式(3)の 2 番目の式の右辺 e_c は、初期圧密曲線に平行する限界状態線：$e_c=e_\Gamma-\lambda\log_e(p)$ 上の拘束圧 p に対する限界間隙比である。

・ダイレイタンシー係数と応力比の関係式に一意性がある。

$$(d\varepsilon_v^p/d\gamma^p)=M-(q/p) \quad (4)$$

再構成粘土に対する実験結果に対して、弾塑性理論を適用し、以下の方法により、カムクレーモデルが得られた。

1. 塑性ひずみの発生を決定する負荷関数 f と塑性ひずみ増分の方向を定める塑性ポテンシャル g が一致するという仮定を用いて、負荷関数の接平面と塑性ひずみ増分方向の直交性より、負荷関数 f を定めた。その負荷関数は図ー2に示すように、$p-q$ 平面で表現した場合、負荷曲面が p で両端が閉じるキャップ型を示すことになる。
2. 等方硬化を仮定し、硬化パラメータは塑性体積

ひずみ ε_v^p により決定される。

3. 弾性係数は、等方体の場合には、せん断弾性係数 G と体積圧縮弾性係数 K で表現できるが、両者ともに、有効拘束圧依存性を持つ。

図ー2の負荷曲面上に現在の応力点があるとして、有効拘束圧 p とせん断力 q の両者が増加する場合には、塑性挙動が卓越することが予測できる。しかし、掘削時のように p が減少し、q も減少するような経路においては、カムクレーモデルは弾性変形のみを与えることになるが、実際には塑性挙動が卓越する。すなわち、掘削時の大きな塑性変形挙動は表現できないことがわかる。

初期カムクレーモデルが有する限界は、その後の修正により克服された。以下にそのリストを記す。

・3主応力状態への適用：中間主応力の影響を考慮できる（詳細は後述する）。

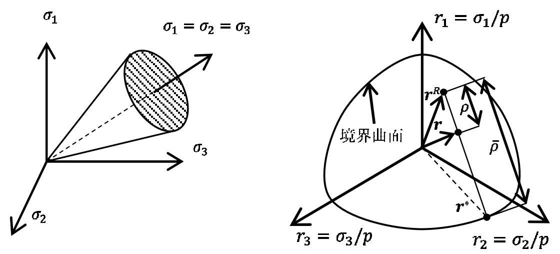
・自然粘土への適用：自然粘土においては、年代効果と呼ばれる、間隙比の変化を伴わない粒子間の化学的反応による強度増加がみられる。このため、カムクレーモデルは何らかの構造を有する自然堆積粘土に対しては過剰な塑性変形挙動を示すことが考えられる。この課題は、名古屋大学グループが開発した上負荷面モデル[10]により克服された。

・不飽和状態の土に対する適用：粘土は飽和状態よりも不飽和状態の方が強度は大きい。これは粒子間に、粒子と間隙水の表面に作用する表面張力を起因とするサクション力が作用し、粒子間の圧縮力を大きくするためである[11]。不飽和土の挙動を再現するために、飽和度100％のときにカムクレーモデルに帰着する不飽和粘土モデルの提案もなされた。

このように、カムクレーモデルがその後の弾塑性モデル発展に与えた影響は極めて大きい。

2.2 砂の弾塑性モデル

カムクレーモデルは砂の挙動にも適用できるとされていたが、上記のようなキャップ型の負荷関数で弾性領域内とされる応力経路でも、応力比 η が増加する場合は塑性ひずみが発生する。さらに、ある拘束圧のもとで塑性変形を出して、せん断応力を減少させて弾性領域に達した後、さらに拘束圧を増加し、その後せん断応力を増加させたときに



(a) 三主応力での負荷関数　(b) 偏差応力面での負荷関数

図 3.繰り返し挙動のための距離の決定

は、キャップ型では説明ができずに応力比を基本とする負荷関数：$f = \eta + \mathrm{m} \ln p$（m は定数）の方が実験結果を適切に表現することがわかった。

このため、砂については、負荷関数 f を応力比一定条件、塑性ポテンシャル g については、応力比・ダイレイタンシー関係式より求めたキャップ型関数とし、f と g の形が異なる非関連流動則の弾塑性モデルが提案された。

非関連流動則は、剛性マトリックスが非対称になるために、数学的取り扱いが面倒になる。特に、モデルとしての安定性の議論を困難にする。

関連流動則と非関連流動則のどちらがいいのか、という議論もなされたが、この問題は対象とする問題がたどる応力経路に依存した話である。対象とする問題に「より適したモデルを利用すればよい」という結論になる。

2.3 繰り返し載荷時のモデル

地震時の地盤挙動をシミュレーションするためには、繰り返し載荷時の変形挙動のシミュレーションが大事になる。繰り返し載荷の基本的定式化については、文献[1,4,12]が参考になる。

実験結果の再現の目的では、特に作用するせん断応力 τ とせん断ひずみ γ の1次元挙動を対象として、単調載荷時の応力ーひずみ関係：$\tau = f(\gamma)$ を用いて、それを単に定数倍して除荷時の挙動とする。Masing の規則：$(\tau/\alpha) = f(\gamma/\alpha)$（α は定数で、α＝2 がよく用いられる）がよく知られている。きわめて簡潔な関数関係であることより、多くの工学材料の 1 次元応力ーひずみ関係の繰り返し挙動の定式化に用いられている。Masing の規則については、文献[1,4]に詳しい。

2次元、3次元の問題に適用するためには、弾塑性モデルが適当である。単調載荷時の塑性ひずみの発生量に比較すれば、除荷時の塑性変形は

小さくなる。すなわち、塑性ひずみについては、除荷時には発生しにくくなる。

この挙動を表現するためには、図-3を参考にして単調載荷時の負荷曲面を「境界曲面」として、応力反転時の応力比 $r_{ij}^R=(s_{ij}^R/p)$ を始点として、現在の応力比 r_{ij} までの距離 $\rho=\left\|r_{ij}-r_{ij}^R\right\|$、さらに応力増分方向の線分と境界曲面の交点を参照点 r_{ij}^* として、始点と参照点の距離 $\bar{\rho}=\left\|r_{ij}^*-r_{ij}^R\right\|$ とする。ここに $\|...\|$ はノルムであり、$\left\|a_{ij}\right\|=\sqrt{a_{ij}a_{ij}}$ と定義される。この2つの距離の比 $(\rho/\bar{\rho})$ で、塑性係数を決定することにより、塑性ひずみ増分の大きさを調整するとヒステリシス挙動は表現できる。このような定式化により繰り返し挙動を表現するモデルは「境界曲面」モデルと呼ばれている。

詳細は省略するが、もう一つの方法としては、負荷曲面が等方的に硬化する等方硬化と負荷曲面の中心が移動する移動硬化の両者を用いて、中心の移動に関して、非線形な関係を与える非線形硬化モデルがある（例えば、文献[4,12]）。このモデルでは、載荷時と除荷時の塑性係数が、非線形関係を移行則に用いていることにより、自動的に異なる結果（徐荷時の方が載荷時より塑性係数が大きくなる）となり、ヒステリシス挙動を描くことになる。しかし、過度のラチェット現象（ある方向へひずみが卓越する現象）をもたらすことが知られている。

除荷時に対しても、単調載荷時の応力比・ダイレイタンシー関係式をなんらかの形で修正すれば、繰り返し載荷にともなうダイレイタンシー挙動を表現できることが知られている。最も簡単な修正は、応力比・ダイレイタンシー関係式のもともとの式であるエネルギー関係式を修正した式:

$$p'd\varepsilon_v^p+s_{ij}de_{ij}^p=p'Md\bar{\varepsilon} \qquad (3)$$

を用いるものである。この式より、除荷時には左辺の第2項が負となり、除荷時に大きな体積圧縮が生じることが表現できる。

3 内部変数理論に基づく構成モデル

3.1 内部変数理論とは

様々な非線形構成モデルが、金属、岩、コンクリート、土、ポリマーなどの多くの工学材料に対して提案されるようになり、構成モデルの統一的枠組みが必要となった。その役割を担ったのが、内部変数理論である。内部変数理論の発展の詳細は、文献[5]が参考になる。ここでは、地盤材料の構成モデルにおいて中心的役割を果たす弾塑性モデルを対象として、内部変数理論の数学的枠組みと熱力学の第2法則に基づく制約条件について、既往の文献[1,3,4,12]を参照して、簡潔にふりかえる。

材料の非線形・不可逆的な力学的挙動を表現する構成モデルを構築するにあたって、応力、ひずみという力と変形に係わる外部変数以外に、材料の内部構造の選択（同定）とその内部構造の変化を表現する移行則を決定するために、内部変数が定義される。内部変数はテンソル量であることが必要条件となる。一般には、0階のテンソル（スカラー）、1階のテンソル（ベクトル）、2階のテンソル、さらに高次のテンソルが候補となる。材料がもつ異方性を表現するためには、ベクトル、2次のテンソルが定式化に含まれることになる。

非線形挙動を表現するためには、微分型のモデルと積分型のモデルが用いられる。ここでは、非線形構成モデルの大部分を占める微分型を対象に議論を進め、式としては速度形式を用いる。

最終的には、増分型初期値境界値問題としての力学的挙動の表現を目的として、応力速度とひずみ速度の関係式を表現することが目的となる。

この関係式に、材料の特徴を表現するために、必要不可欠と考えられる複数の内部変数 $\xi^{(\alpha)}$ を取り入れる。これらの内部変数もまた、外部で定義されるひずみや応力の変化に応じて変化するものとする。

外部で観察されるひずみ速度 $\dot{\varepsilon}_{ij}$ の成分として弾性ひずみ速度 $\dot{\varepsilon}_{ij}^e$ を想定する。さらに、非弾性ひずみとして、内部力の伝達に係わる構造の変化（例えば、物体内のクラックの発生など）に係わるもの $\dot{\varepsilon}_{ij}^c$、この構造の変化に付随して起こる内部構造の変化（例えば、内部構造の回転やすべり運動など）に係わるもの $\dot{\varepsilon}_{ij}^p$ の2つを考えることができる。必要な場合には、非弾性ひずみのメカニズムの数を増やすこともできる。しかし、構成モデルを実際の問題に適用しようとする場合には、2つ以上のメカニズムの設定は現実的ではない。これらの非弾性ひずみも内部変数を構成することになる。

以下では、微小ひずみの仮定を用いて、これらのひずみ成分は線形和として表現できるものとする。すなわち、以下の式が成り立つ。

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}^{c}_{ij} + \dot{\varepsilon}^{c}_{ij} + \dot{\varepsilon}^{p}_{ij} \tag{5}$$

3.2 速度型応力・ひずみ関係式

材料内部の微視的構造を表現するスカラーの内部変数を α 、2階のテンソルで定義された複数の内部変数を $\xi^{(\alpha)}_{ij}$ と表現する。非弾性ひずみとして2つのメカニズムを設定し、$\dot{\varepsilon}^{c}_{ij}$ 、$\dot{\varepsilon}^{p}_{ij}$ と表現する。外部変数である応力 σ_{ij} とひずみ ε_{ij} が与えられ、それまでの変形履歴が内部変数の値で与えられた状態から、ひずみが微小な量変化したときの応力とひずみの増分の変化を、速度表現を用いて、式(1)のように表現したい。

$$\dot{\sigma}_{ij} = E_{ijkl}(\alpha, \xi^{(\alpha)}_{ij}, \varepsilon^{c}_{ij}, \varepsilon^{p}_{ij})\dot{\varepsilon}_{kl} \tag{6}$$

ここで、非弾性ひずみも内部変数になりえることを強調して陽に表現している。

この式を得るために、内部構造を一定としたときの弾性的関係を式(7)のように記述する。

$$\dot{\sigma}_{ij} = E^{e}_{ijkl}(\alpha, \xi^{(\alpha)}_{ij}, \varepsilon^{c}_{ij}, \varepsilon^{p}_{ij})\dot{\varepsilon}^{e}_{kl} \tag{7}$$

式(2)の剛性テンソル E^{e}_{ijkl} は、変形に伴う内部構造の変化により、時々刻々変化すると考えている。

仮定した内部変数のすべてが、全ひずみ速度の関数として表現されれば、式(8)が得られる。

$$\begin{aligned}
\dot{\alpha} &= m_{kl}(\alpha, \xi^{(\alpha)}_{ij}, \varepsilon^{c}_{ij}, \varepsilon^{p}_{ij})\dot{\varepsilon}_{kl} \\
\dot{\xi}^{(\alpha)}_{ij} &= f^{(\alpha)}_{ijkl}(\alpha, \xi^{(\alpha)}_{ij}, \varepsilon^{c}_{ij}, \varepsilon^{p}_{ij})\dot{\varepsilon}_{kl} \quad (\alpha = 1, 2, \cdots) \\
\dot{\varepsilon}^{c}_{ij} &= f^{c}_{ijkl}(\alpha, \xi^{(\alpha)}_{ij}, \varepsilon^{c}_{ij}, \varepsilon^{p}_{ij})\dot{\varepsilon}_{kl} \\
\dot{\varepsilon}^{p}_{ij} &= f^{p}_{ijkl}(\alpha, \xi^{(\alpha)}_{ij}, \varepsilon^{c}_{ij}, \varepsilon^{p}_{ij})\dot{\varepsilon}_{kl}
\end{aligned} \tag{8}$$

式(8)を式(5)と組み合わせることにより、式(6)の関係式が得られる。

これらの式では、剛性テンソルが、ひずみ速度の方向に依存しない速度（増分）線形モデルを想定している。また、式(7)のように、内部変数に依存するような弾性関係式は亜弾性体であり、エネルギー散逸がないとする弾性体の条件を満足しないことには注意が必要である。

ひずみ以外の内部変数は更新されて、微小な変形が生じた後の内部構造を表現することになる。

実際に、式(8)の内部変数の変化を表現する式を物理的観点から定式化することは極めて難しい。さらに、様々な数学的テクニックも必要となるが、これらの詳細については、本文では触れない。

これらの式に対する制約条件として機能する2つの条件について、以下に簡潔に記述する。

3.3 客観性の原理に基づく制約条件

力学的関係式の定式化に当たっては、観測者の変換によって、力学的関係は変化してはいけない。この当然の要求を客観性の原理と呼ぶ（文献[13]に詳しい）。この原理は、関係式の定式化に当たって、次の2つを要求する。

1）関係式を表現するのに用いる変数およびその変化速度が客観性を有すること。

2）客観性を有する変数で記述された関係式が、数学的な定義である等方関数であること。

この2つの要求を簡潔に説明する。

1）の変数およびその速度表現に対する客観性の原理は、関係式に用いる変数が観測者の変換に対して、例えば、2 階のテンソル A_{ij} に対して、次式を満足することを要求する。

$$A_{\alpha\beta} = Q_{\alpha i} A_{ij} Q_{j\beta} \tag{9}$$

式(9)において、$Q_{\alpha i}$ は任意の直交テンソルである。

ある状態の変数については、式(9)はテンソルの定義式そのものである。しかし、その速度は、観測者の変換に対して、必ずしも式(9)を満足しない。例えば、有限変形を取り扱う場合には、応力を時間微分して得られた速度は式(9)を満足せず、構成モデルの定式化には、式(9)を満たす客観性を有する応力速度が要求される。

ある変数の速度表現が客観性の要求をみたすことが問題になるのは、有限変形理論の場合であり、多くの工学的問題が扱う基準配置と現配置を区別しない微小変形理論では問題にならない。

2)の関係式については、微小変形、有限変形の区別なく成立しなければならない。すなわち、どのような関係式であっても、任意の直交テンソル $Q_{\alpha i}$ に対して、次式(10)が成立しなければいけない。

$$Q_{\alpha i}\dot{\sigma}_{ij}Q_{j\beta} = E_{\alpha\beta}(Q_{\alpha i}\xi_{ij}^{(\alpha)}Q_{j\beta},\cdots,Q_{\alpha i}\dot{\varepsilon}_{ij}Q_{j\beta}) \quad (10)$$

式(10)を満足する関係式を等方関数と呼んでいる。これは、材料の等方的性質、異方的性質とはまったく異なるもので、関数の性質を表現する数学的名称であることには注意が必要である。

式(10)を満たす関数に対しては、その既約表現(最も簡潔で十分な表現)が研究され、不変量と成分により決定され、表示定理と呼ばれている。スカラー関数に対しても規約表現がある。すなわち、必要な変数を含むスカラー関数、テンソル関数が取るべき数学的表現の形式には制約条件があるということである。

過去の構成モデルの内部変数の定式化においては、既約表現として必要かつ十分な成分の集合のうち、ごくわずかな部分のみを取り出して定式化されていることが多い。この事実は、内部変数に対する情報がわずかであるために複雑な定式化が困難であることを示すとともに、等方関数の表示定理だけでは、具体的な構成モデルの定式化には役立たないことも意味している。

等方関数および表示定理の具体的使用例については、既往の文献[1,11,12]が参考になる。

3.4 熱力学の第2法則に基づく制約条件

内部変数理論では、エントロピー増大の法則として知られる熱力学の第2法則に基づく制約条件が課される。詳細な導入は、既往の文献[1,4]に譲るが、力学的問題に関しては、Claudius-Duhemのエネルギー散逸が正の条件となり、式(11)で表現される。

$$\dot{W}^{p} = \sigma_{ij}^{c}\dot{\varepsilon}_{ij}^{c} + \sigma_{ij}^{p}\dot{\varepsilon}_{ij}^{p} + \sum X_{ij}^{(\alpha)}\dot{\xi}_{ij}^{(\alpha)} + \sum Y^{(\alpha)}\dot{\alpha}^{(\alpha)} > 0 \quad \cdots\cdots(11)$$

想定した内部変数の変化に対して、その内部変数と熱力学的共役力 $X_{ij}^{(\alpha)}, Y^{(\alpha)}$ 等の内積の総和が正であることを要求している。さらに強い条件として、個々の内部変数の変化に対して、散逸が正であることを要求することが多い。

この条件は、作用している熱力学的力の方向に内部変数が変化することを要求していると考えられる。受け入れやすい条件であるが、具体的な定式化に際しては、その議論は、内部変数とその変化を支配する熱力学的力の同定に関する情報が不足するために、極めて難しいものとなる。

微視的な内部構造に立ち入ることなく、自動的にこの制約条件を満足するために、熱力学的ポテンシャルと散逸を支配する散逸関数という2つのスカラー関数を仮定する構成モデルの定式化に対する研究もおこなわれている(例えば、文献[14])。

このような2つのスカラー関数を、その物理的意味を議論することなく、単に仮定する形式論的定式化は数学的には矛盾はないが、実際の材料挙動を子細に観察した定式化ではないために、内部変数の意味、モデルの適用範囲は不明である。

金属材料と比較して、きわめて多様な内部構造変化を有する地盤材料の定式化における熱力学的制約条件については、まだ議論すべき課題は残されている。これまでに提案された構成モデルについては、式(11)に反するものは提案されていない。

3.5 内部変数をどのように定義するか

内部変数理論は、非線形構成モデルの数学的枠組みを与えるものであり、内部変数として何を定義するかについては制約条件を与えていない。定式化を容易にするための物性的背景のない仮想的な変数であってもよい。構成モデルは実験結果を表現する数式に過ぎないという立場もありえる。物性的なイメージを持つことなく仮想的な変数を定義し、実験事実にフィッティングするように、必要な関数形式を定めるということになる。

物性を大事にしたいと考えても、内部変数に対する情報は不足するので、最終的にはカーブフィッティングや様々な応答を適切に表現するために、関数形に対して試行錯誤が必要となる。最終的に実験事実に合わせるのであれば、モデル構築のすべてのプロセスで、単に曲線のあてはめと割り切ってもよいのではないかとする主張には一定の合理性がある。

しかし、提案する構成モデルの適用性と限界を議論するとき、与えられた問題に対して、モデルの簡略化あるいは複雑化を考える場合には物性的な観点に基づく定式化の試みは重要になる。本文では、できる限り物性的、微視的観察の結果を取り入れた構成モデルの構築が望ましいという立場を取る。

4 微視的観察結果に基づく内部変数

の同定とその移行則：粒状体の場合

4.1　材料の微視的挙動と巨視的挙動

様々な工学材料の微視的構造は、強さ・剛性に大きな影響を与えることより詳細な研究がなされている。金属材料やポリマーについては、材料科学の立場から、顕微鏡レベルでの微視的情報が豊富である。金属では、多結晶体の場合には、非弾性ひずみをもたらすメカニズム（結晶内の転移など）が比較的明確であり、弾性的性質も、転移運動が結晶の構造を大きく変えることがないために、塑性変形によらず不変であると考えることができる。このため、微視的挙動を数学的に平均化して巨視的挙動を求める研究が進められ、大きな成果を収めている（例えば、文献[15]）。

地盤材料（岩、コンクリート、土）の場合には、材料科学的研究が大きな利益をもたらすことがないために、材料に対する物性的研究は十分ではない。さらに、外力を受けたときに、内部の力を伝える特殊な構造や、クラックの発生・閉合が発生し、弾性的性質も変形量に応じて変化する。残留ひずみをもたらす塑性変形の微視的メカニズムも多様である。微視的メカニズムの複雑さより、その挙動を平均化して、巨視的挙動を求めることは困難になる。

微視的挙動を直接的に巨視的挙動と関連させることが難しいために、微視的な研究と巨視的な構成モデルの研究は分離した状態で別個に進められてきたといえる。これは地盤材料のすべてに共通することであり、巨視的（現象論的）構成モデルの物性的背景は、多結晶体金属と比較すると、合理性および厳密性に欠けることになる。

しかし、今後の地盤材料の構成モデルの発展を考えるとき、微視的挙動に関する研究成果を整理し、その中の重要なメカニズムと巨視的構成モデルの定式化の関係をできる限り正確に議論する努力は不可欠である。

構成モデルを数値解析手法に適用し、実際の問題を解析し、最終的判断に利用できる数値計算結果を提供することが必要になる。そのためには、利用している構成モデルに対して、「何が表現できているか」「何が無視されているか」「与えられた問題に対して、重要な特徴を表現できる適切なモデルが使用されているか」が正確に答えられなければいけない。これらの問いに適切に答えるためには、対象とする材料の微視的挙動に対する理解が必要となる。

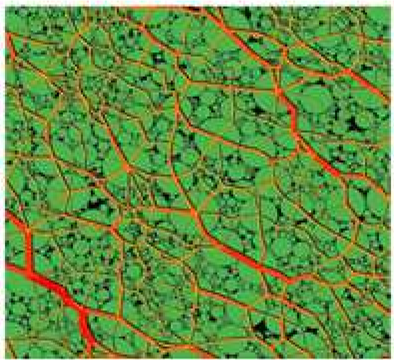


図 4.力の鎖のイメージ図（文献[17]より引用）

砂の内部構造の微視的研究は、せん断に伴い発生する内部構造がきわめて異方的であり、外力が変化しただけでその内部構造は崩壊し、別の構造に変化することが明らかになっている。

以下では、砂のような粒状体の挙動を理解するための「粒状体の力学」分野でほぼ定説となっている事実を整理する。

4.2　砂のような粒状体の微視的挙動

多数の粒子からなる粒状体に対して、外力に対する抵抗が、粒子間の接触点における摩擦抵抗のみで与えられる場合を考える。砂供試体の変形に伴う内部構造の変化は、1970 年代に、変形段階に応じて、その内部構造を樹脂で固結し、薄片を形成し、顕微鏡写真を用いた解析により調べられた。その後、数値解析手法として個別要素法（DEM）が提案され、2次元、3次元の多数の粒子からなる集合体の挙動が解析され、粒子レベルの挙動について、多くの事実が明らかになった。粒状体力学の発展についてのより詳細な情報については、文献[7]が参考になる。

以下、粒状体の力学分野で明らかになった事実のうち、巨視的構成モデルの定式化に有用と考えられる事実を列挙する。最初に、粒状体の微視的量の統計的性質として観察された事実を述べ、次に、粒状体の特殊な内部構造である力の鎖(force chain)（図ー4参照）について述べる。粒状体に与えられた外力は、主に力の鎖を通して伝達される。力の鎖を形成しない粒子は弱い力を伝達している。

・粒状体の内部構造とその変化

ここでは、粒状体全体に対して、微視的な量の統計的性質について記述する。

1）堆積した状態であっても、砂粒子の接触点方向

の分布は重力方向に卓越しており、異方的分布となっている。

2) 砂粒子が球形ではなく、楕円体で近似できる場合、粒子の長軸方向は水平方向に卓越する。

3) せん断に伴い、接触点方向は最大圧縮応力が作用する方向の接点が増加し、それに直交する方向の接点は減少する。

4) 粒子の長軸方向の分布は、接点方向とは異なり、応力・ひずみ関係のピーク時まで大きな変化は見られない。

5) せん断に伴う体積膨張(以下、ダイレイタンシーと呼ぶ)とともに、粒子1個当たりの平均接点数は減少する

・粒状体の内部構造に関する知見

ここでは、粒状体が自発的に形成する特殊な内部構造に関する知見を求める。この特殊な内部構造の発達は自己組織化現象との類似性が認められる。

6) 粒状体の境界面に対して与えられた外力は、特殊な構造が形成されて伝達される。この特殊な構造は、力の鎖と呼ばれている。

7) せん断に伴い、力の鎖を形成する粒子はより異方的になり、その長軸方向は最大圧縮応力の方向と一致する。

8) 力の鎖を形成する粒子の中心を結んで得られる図形は、せん断とともに辺の数を増加させ、その内部に大きな空隙を形成する(図ー5 参照)。

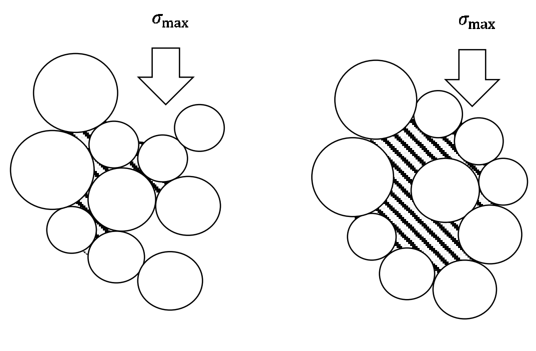
9) 大きな粒子間力を伝達する力の鎖とそれ以外の弱い粒子間力を伝える粒子群の挙動は、大きく異なっており、最大圧縮応力方向への異方性の発達は、弱い粒子群では顕著でない。

これらの性質以外にも、多くの知見が得られている。しかし、微視的情報を巨視的構成モデルの定式化に活かそうという観点からは、これらの知見だけで充分である。

・内部構造の数学的定式化

微視的挙動に関する知見を構成モデルに適用するためには、微視的量の空間分布をテンソル量として表現するのが適切である。

例えば、粒子間の接点方向 n_i の分布を特徴づけるために、その確率密度関数 $E(\Omega)$ を求め、次式で2階のテンソルを定義できる。



(a)初期状態　　(b)ピーク時の状態

図 5.せん断による粒子構造変化のイメージ図

$$F_{ij}=\int_{\Omega}E(\Omega)n_i n_j d\Omega \tag{12}$$

確率密度関数 $E(\Omega)$ を再現するためには、さらに高次の偶数階のテンソルが必要となる。2階のテンソルは、どのような分布であっても、楕円体として近似していることになる。

粒子接点ばかりでなく、相接する粒子の中心を結ぶ線分、粒子の長軸方向、間隙の長軸方向の分布などが2階のテンソル量として表現されている。これらを総じてファブリックテンソルと呼んでいる。ファブリックテンソルに関する詳しい議論は、文献[7]が参考になる。

特殊な内部構造である力の鎖の数学的表現は得られていない。力の鎖は特殊な空間配置を取り、点としての性質に帰着できない。このために、点の性質を対象とする通常の連続体力学では直接的に定式化に利用することはできない。特徴的長さの導入が可能となる一般化された連続体力学では、直接的な導入が可能であるが、きわめて難しい定式化となる。

通常の連続体力学の範囲内では、力の鎖のような特殊な内部構造については、点の性質として定義される内部変数として数学的表現を行い、その移行則を、力の鎖の局所的崩壊、再生、形状変化等に関する微視的挙動を基礎に、考察し、その変化を記述することになる。

力の鎖は、流動状態にある粒状体(例えば、土石流)が自発的に流動を停止する現象においても主体的なメカニズムとなる。すなわち、泥水の中に分離していた大きな粒子が、流動中に力の鎖を形成することができた場合には、流れに対して大きな剛性を有することになる。

力の鎖の重要性は、粒状体分野の多くの研究者が共通に認めるところであり、多くの試みがなされている。例えば、粒状体の最も特徴的な変形挙動であるダイレイタンシー（せん断に伴う体積膨張あるいは体積圧縮）と力の鎖の関係などが議論されている（例えば、文献[16]）。

粒状体の微視的挙動から巨視的量である応力、ひずみ、非線形構成モデルを導こうとする努力は研究が継続されてきた。これらの研究に対する総括報告の例として文献[17]が参考になる。

砂のような粒状体が示す不思議な挙動は、地盤工学などの分野で中心的役割を果たすとともに、物理、化学の分野でも興味を集めている。本文では固体の力学に相当する特徴のみを取り上げた。

4.3 表現すべき粒状体の巨視的挙動

これからの砂のような粒状体の弾塑性モデルの発展を考える上で大事な巨視的挙動を以下にまとめる。

・密度・拘束圧依存性

砂のような粒状体は、粒子の接触面での摩擦抵抗により外力を支持する。密度が高くなれば、粒子1個当たりの平均接触点数は多くなることより、密度の増加とともに、拘束圧 p が同じであれば、同じせん断ひずみに達するために必要なせん断応力 q は大きくなる。さらに、同じ密度のもとで、拘束圧が大きくなると、より緩い砂の挙動を示すことが知られている。

このような密度・拘束圧依存性を、一つの弾塑性モデルで表現するための努力がなされてきた。その代表例である状態変数を考えるモデルについては、第5章において検討する。

・真の3主応力状態（中間主応力）の影響

砂を含む地盤材料の最も基本的な試験方法は、円柱供試体を用いた三軸圧縮試験である。この時の挙動と真の3主応力状態では、応力比で定義した破壊条件、限界状態の応力比の値が異なることが知られている。これらは、偏差応力テンソル s_{ij} の第2不変量 J_2、第3不変量 J_3 で定義するLodeの角を用いることにより表現できることが知られている。（中間主応力を取り入れた負荷関数については、文献[3]に詳しい。）

・主応力回転時の非可逆的な変形

本質的に粒子の接触点の摩擦抵抗により外力を支える砂のような地盤材料に対して、主応力方向が回転しない単調載荷時の挙動のモデル化では、塑性変形の条件となる降伏（負荷）条件式として、応力比を用いた定式化が行われる。これらの負荷条件式は、等方硬化を考える場合には、主応力の値が一定であれば、塑性変形は出ないことになる。

しかし、主応力の値は変えないまま、主応力が作用する方向を変える「主応力軸回転」試験を行った場合には、塑性変形と体積圧縮（負のダイレイタンシー）が生じることが実験事実として知られている。

このような挙動の定式化には、一つのモデルの中に、方向性を有する多重メカニズムモデルを設定する方法[18]、負荷曲面の接線方向の応力増分を取り出して、この成分が塑性変形をもたらすとする「接線塑性」の方法がある。さらに、応力増分の方向が塑性挙動に影響を与えることを考慮して、正規化された応力増分 $r_{ij}^{*}=\dot{\sigma}_{ij}/\|\dot{\sigma}_{ij}\|$ を応力速度とひずみ速度の定式化に、独立な成分として、利用する増分非線形モデルによる方法もある[18]。

・初期異方性、誘導異方性の表現

地盤材料は、重力の影響を受けて、堆積時において、粒子の長軸方向が水平方向を向くなど粒子がより安定した方向を取り、力学的性質として異方性を示す。この異方性には、破壊時まではその異方性が継続する初期異方性（粒子の長軸の配列）と作用する応力により容易に変化する応力誘導異方性（粒子接点の方向）の2つが存在する。

初期異方性の影響については、応力テンソルと内部構造を表現するファブリックテンソルの両者より定義される修正応力テンソルを用いて、異方的な応力ひずみ関係を表現する方法が提案されている [19,21]。

応力誘導異方性を弾塑性モデルに取り入れる巧みな方法については、第5章で紹介する。

5 内部構造の変化を考慮した弾塑性モデルの提案

本節では、砂のような粒状体の弾塑性モデルとして最も広範囲な挙動を表現するモデルについて、定式化の主要な部分、限界状態と状態変数の役割、さらにファブリックテンソルと力の鎖の導入可能性を検証する。

5.1 密度・拘束圧依存性および誘導異方性を考慮した弾塑性モデルの検証

砂のような粒状体の速度形式の弾塑性モデルの定式化に内部構造の変化を取り入れることを考える。この目的を達成するために、定式化の基本として、Li and Dafalias モデル[8]を採用する。このモデルは、砂のような粒状体が示す密度と有効拘束圧に依存する挙動を状態変数ψで表現するものである。状態変数ψは、現在の有効拘束圧pと間隙比eと有効拘束圧pに相当する限界状態線(C.S.L.)のe_cの差として定義するものであり、ψは次式で定義される（図-6　参照）。

$$\psi = e - e_c = e - [e_\Gamma - \lambda_c (p / p_r)^\xi] \tag{13}$$

限界状態(critical state)とは、大きなせん断を受けた砂が最終的に到達する状態であり、さらにせん断が進んでも、ダイレイタンシー、応力の変化がないような状態である。これらは式(2)、(3)で定義された条件と同じである。粘土の場合には、初期圧密曲線も一意的であったが、砂の場合には初期圧密曲線は初期間隙比に応じて無数に描かれる。これは、練り返された粘土が内部構造を持たないのに対して、砂は間隙比に応じて内部構造がすでに発達しているためであると考えることができる。初期モデルは、三軸圧縮状態に限定されたモデル化であった。

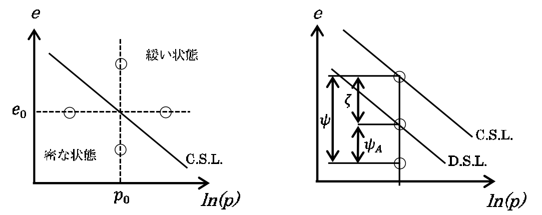
このモデルが多様な条件での実験事実を精度よく表現することは、飛田ら[20]により検証された。

さらに、3 つの主応力が異なる一般的な応力状態への拡張[21]、初期異方性の導入、繰り返し載荷時の挙動への拡張[22]がなされた。

状態変数ψの基本的な機能を、ダイレイタンシー係数d（$d = d\varepsilon_v^p / d\gamma^p$）および塑性係数$K_p$の関数形を基に考察する。それぞれ、次式で定義される。

$$\begin{aligned} d &= (Me^{m\psi} - \eta) \\ K_p &= \frac{hGe^{n\psi}}{\eta}(Me^{-n\psi} - \eta) \end{aligned} \tag{14}$$

式(14)におけるMは限界応力状態の応力比、ηは応力比である。そのほかの材料定数は正の値を取る。ψが正の値を取るとき、dの式の右辺第 1 項は大きくなる。すなわちダイレイタンシーが負から正（圧縮から膨張）を与える応力比ηが大きくなる。また塑性係数K_pは0となるときの応力比ηが小さくなることを示している。すなわち、ψが正の時は、緩い砂の挙動（圧縮性が高く、応力ひずみ関係がピーク時の応力比が低い）を表現することになる。このように状態変数ψを導入することにより、密度拘束圧依存性を表現することができる。



(a)限界状態線と状態変数　　(b)状態変数の拡張

図 6.状態変数の定義

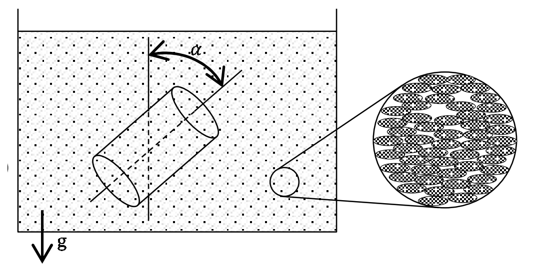


図 7.初期異方性を有する供試体の作成

このモデルを基本として、内部変数として粒子接点の分布を表現するファブリックテンソルに着目して、この内部変数が、最大圧縮応力方向を指向するように移行則を与えた。正規化された偏差ファブリックテンソルF_{ij} ($\|F_{ij}\| = 1, F_{kk} = 0$) と載荷方向を特徴づけるテンソル（比例負荷の単調載荷試験の場合には、偏差応力テンソルs_{ij}とできるが、一般的にはN_{ij}と表現される。）$n_{ij} = (N_{ij} / \|N_{ij}\|)$の内積$F_{ik}n_{ki}$としてスカラー変数$A$を定義する。このパラメータ$A$と、状態変数$\psi$と同等の役割を示す、付加的なスカラー変数$\zeta$を定義した（図ー6 参照）[23]。

このような定式化により、図ー7 に示すように、堆積した砂の切り出し角度を変えて三軸圧縮試験を実施した時の挙動、すなわち、切り出し角度が鉛直方向から離れるに従って、より緩い砂の挙動（低い応力比、大きな負のダイレイタンシー）となる実験事実を表現した。

この定式化で注意すべきことは、異方性の情報

を含むファブリックテンソルを導入したものの、定式化の途中で、スカラーパラメータ A に変換していることである。すなわち、誘導異方性を考慮することにより拡張されたモデルは、異方性の影響が応力速度とひずみ速度の関係式に再現されず、構造主軸と応力主軸が一致しない場合の塑性ひずみ速度と応力主軸が一致しない現象（非共軸性とよぶ）を説明できない。このため、最終的な弾塑性モデルは、等方弾塑性体としての数学的性質をもち、塑性ひずみ増分と応力は常に共軸性を示すことになる。

この欠点は、すでに述べた異方性 A を含む塑性ポテンシャルを導入して、塑性ひずみ速度の方向が塑性ポテンシャルの法線方向とする定式化により解消された（文献[24]参照）。法線方向が塑性ポテンシャルの応力に関する偏微分により与えられるために、A に対する応力テンソルの偏微分により、ファブリックテンソル自身が塑性ひずみ速度の方向に関与するという定式化となっている。

5.2 内部構造の変化を考慮する砂の弾塑性モデルの定式化で今後必要となる研究

4 章にまとめた内部構造変化に対するこれまでの知見と比較すると、実際に弾塑性構成モデルに用いられた知見は、わずかに誘導異方性に関する知見のみである。すなわち、「誘導異方性の主軸は最大圧縮応力方向に一致するように変化する」という知見だけが利用されているに過ぎない。

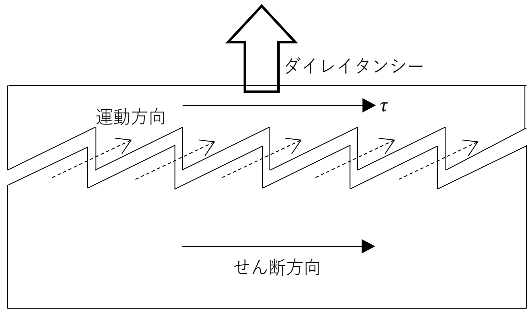
粒状体力学で得られた知見のすべてを巨視的構成モデルに反映することは不可能である。巨視的構成モデルは、材料の大事な特徴を平均的に表現したモデルに過ぎず、巨視的挙動へ大きな影響を与える知見の導入だけで十分である。

粒状体力学で最も重要と考えられている、粒子間力の大きな部分を伝達する特別な「力の鎖」の発達と崩壊については、現時点で何らの言及もなされていない。このことは、完成したモデルの適用性を著しく限定することになる。すなわち、主応力軸が回転しない比例負荷経路の単調載荷に限定したものとなる。

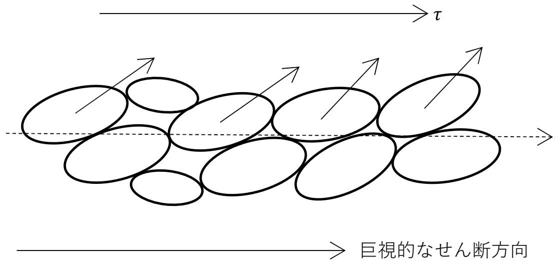
・力の鎖の発達と崩壊に関する知見の導入

砂のような粒状体の特徴的な性質であるダイレイタンシーがなぜ発生するのか。

これについては、すべり面の方向と粒子のすべりの方向が異なるとする「のこぎり歯モデル」（図-8参照）が感覚的にわかりやすく、多くの説明に利用されている（文献[7]に紹介されている）。しかし、粒状体力学の分野ではこのすべりモデルによるダイレイタンシー発生のメカニズムを肯定する結果は得られていない。



(a) のこぎり歯モデル



(b) すべりによる粒子レベルでのダイレイタンシー説明

図 8.すべりによるダイレイタンシーの説明

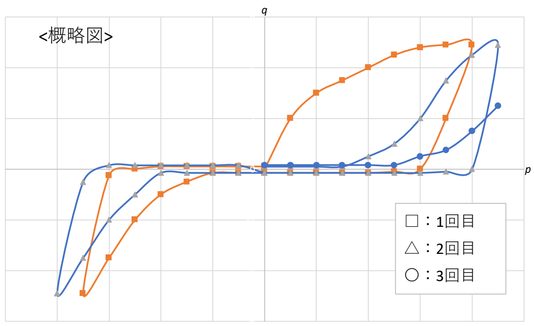


図 9.サイクリックモビリティの概念図
（繰り返し回数の増加によりせん断ひずみが増加する現象）

ダイレイタンシーのメカニズムの合理的な説明において「力の鎖」とそれを支える周辺システムについて理解をすることが、繰り返し載荷時に累積する体積変化を定式化するのに役立つことが期待できる。

地震時の飽和砂地盤の挙動は、載荷時間が短いために、砂の透水性が他の土と比較して高いとはいえ、非排水状態で近似できる。このために、非排水条件を課した室内試験が実施される。このとき、飽和砂の特徴的挙動として、図-9 に示す、繰り返し回数の増加とともに、発生するひずみが次第

に増加するサイクリックモビリティ現象がみられる。

せん断応力がほぼ0となる付近で、飽和砂は流動挙動を示す。しかし、逆方向の載荷領域に入ってすぐに剛性を回復する現象がみられる。これらは、内部構造の変化としては、力の鎖の崩壊により流動し、流動中の力の鎖の再構築(一般的には、ジャミング現象と呼ばれる)に関連する現象であると考えられる。繰り返し回数が増加すると発生するひずみが大きくなるのは、流動している間のひずみが大きくなっているためであり、剛性を回復した後の挙動は、繰り返し回数によらず、ほぼ同じであることが知られている。これらの挙動を合理的に内部構造の観点から説明するためには、力の鎖に関する知見が必要となる。

また、飽和砂地盤が地震時に液状化現象を起こした後、間隙水の消散時に大きな体積圧縮挙動を示すことが知られている。このときの体積圧縮は、砂が示す通常の有効拘束圧増加時の体積圧縮に比べれば極めて大きな量であることが知られている。この現象の説明には、液状化により砂が有する力の鎖が完全に消失し、その再構築に際しては、粒子の接触点増加が必要であり、大きな体積圧縮が必然となると想定すれば、一応の解釈はできる。しかし、どのようなパラメータを設定し、どのような移行モデルを設定すればいいのかについては、今後の課題となっている。

以上のように、砂のような粒状体の力学的挙動における力の鎖の重要性は、研究者の誰もが等しく認めるものであるが、その解釈および構成モデルへの利用はまだなされていない。

6 これからの非線形構成モデルの発展への展望

6.1 利用すべき非線形モデルを選択するモデルの開発

地盤工学分野の発展により、地盤材料に対して実験事実が集積されてきた。これらの実験事実の表現を目的にして巨視的構成モデルが提案されてきた。実験事実に基づいて、様々な変形特性を取り入れると、応力速度とひずみ速度の関係を与える剛性テンソルは複雑なものとなり、数値解析に際して、不安定化をもたらすことになる。

実際には、安定な変形挙動を示すのに、モデルで同様の経路でシミュレーションすると不安定な変形挙動となることが懸念される。実際には、内部構造が外力に対して適切に変化するのに対して、モデルの内部変数の移行則が、その変化を表現しきれないために数値解析の不安定性をもたらす。

現時点では、砂のような粒状体の内部構造が示す変化を、適切な方法で適切な関係式で巨視的構成モデルに合理的に取り入れることには困難さが伴っている。

一つの構成モデルに様々な特性を取り入れるという試みは今後も継続されるべきであるが、ここでは異なる視点で今後の弾塑性モデルの定式化の可能性を考えてみる。

その一つは数値解析に用いるモデルを自らが選択できるモデルの開発である。すなわち、モデル自体に、負荷・除荷を超える広範な判断を行う機能をもたせることである。

例えば、与えられた問題で卓越するであろう応力経路をモデル自体が判断して、最も適切な(安定した)モデルを選択することができるような、「モデル自身が高い判断機能を有するモデル」の構築が考えられる。このようなモデルの開発は、実務的にも有効な結果をもたらす可能性がある。

6.2 非線形モデルを適切に利用するために

カムクレーモデルを出発点として、これまで数多くの非線形構成モデルが提案されてきたが、実務での利活用はなかなか進まない。場合によっては、モデルの数式構造が難しいことで、ある限られた条件での結果にに過ぎない数値計算結果を過大に評価する傾向もみられる。

高度な構成モデルの発展が適切な評価を受けるための条件について考えてみる。

地盤材料の力学的挙動を精緻に表現するために高度で複雑なモデルを利用することが、地盤工学の問題解決に真に寄与するかどうかは、即答できない。

与えられた問題に対して、適切な解答をだすための条件は、最終判断までのプロセスを考えると理解できる。問題解決の基本的なプロセスは以下の様にまとめることができる。

1. 問題設定:どのような条件で、何を問題とすべきか。問題に関係するすべての条件が反映されているか。
2. データの収集:問題解決に必要な情報の収集。地盤情報、気象に関する情報、対象地点周辺での施工情報などが必要となる。また、採取さ

れた土試料に対して、適切な方法による試験結果も大事な情報となる。

3．解析手法の選択：設定された問題に対する最も適切な解析手法の選択。古典的な慣用解析方法でよいのか。複雑なモデルを利用する数値解析手法を用いるべきか。

4．解析結果に対する判断：解析された結果が、設定した問題に対して適切な判断データとなっているかどうか。複雑なモデルを利用した場合には、一般的な技術者が適切に利用することは難しく、誤用する懸念もあり得る。

地盤工学の場合には、詳細は省くが、これらの基本ステップのいずれにおいても、大きな「不確実性」が横たわっている。この不確実性をできる限り小さくするためには、基本プロセスを何度も繰り返す「Plan-Do-Check-Act」が不可欠となる。

すべてのプロセスを経た後の最終判断の精度は、いずれかの部分に弱さを含んでいれば、その弱さが全体を決定してしまう。少なくても、複雑かつ高度なモデルを数値解析に利用すれば、よい判断につながると即断することはできない。1．2．3．のプロセスの精度が満足できるものであっても、最終段階での技術者の判断が未熟さゆえに不適切なものとなれば、全体的精度は低いものになる。

最終的判断を行うまでの基本プロセス全体の調和のとれたシステム設計が地盤工学の場合には常に必要である。非線形構成モデルおよびそれに基づく数値解析を有効に利用するためには、問題提起から判断に至るすべてのプロセスの精度の向上が必要となる。

7 まとめ

本解説で議論した事項を以下に簡潔に、箇条書きにまとめる。

・地盤材料の非線形構成モデル（本解説での主たるものは速度形式のモデル）の数学的枠組みについては、そのフレームワークはほぼ出来上がっている。客観性の原理と等方関数であるという制約条件より、外部変数と内部変数が想定されれば、その数学的形式は既約な表現として求めることができる。

・非線形構成モデルが満足すべき熱力学第 2 法則から導かれる散逸が正である条件は、当初の段階でポテンシャルと散逸関数を仮定するモデルでは自動的に満たすことを証明できる。しかし、これらのスカラー関数の存在を仮定しない速度形式のモデルでは、現時点では厳密に散逸が正という条件を議論することは難しい。

・内部変数としては、物理的、微視力学的に意味を有するものが、モデルの適用性と限界を議論する上で望ましい。しかし、現時点では、カーブフィッティングの目的で導入される内部変数に対して、その優位性を証明する段階には至っていない。

・砂のような粒状体力学の分野で、粒子接点方向、粒子の長軸方向、間隙形状の卓越方向などの微視的量を平均化したファブリックテンソルや粒子間力の多くを伝える”力の鎖”の生成・崩壊の重要性が指摘されている。

・これらの知見のうち、現時点までに非線形構成モデルの定式化に用いられたのは、粒子接点方向のファブリックテンソルであり、その移行則は「変形に伴い、最大主応力方向に次第に一致する」という数学的性質を有するにとどまっている。

・粒状体の挙動で最も大事な”力の鎖”については、その効果を構成モデルに取り入れたとする研究成果は見られない。直接的な導入は難しく、力の鎖の効果は、硬化則の関数の形式とその変化として表現されるものと想定できる。

・実験で明らかとなった事実を非線形構成モデルに取り入れ、その特徴的な挙動を表現するための数学的構造はこれまでも議論されてきた。このような数学的構造は、きわめて複雑で、安定性に欠け、不必要な分岐現象をもたらす可能性もある。このため、目標とした主応力軸回転などの特殊な経路でのシミュレーションばかりでなく、多様な経路での性能を確認することが必要になる。

・一つのモデルの中に、すべての性能を備えたモデルを構築するよりも、特定の経路で威力を発揮するより簡潔なモデルを複数用意し、応力経路において最も適切なモデルを自ら選択するような判断能力を有するモデルの開発も考えるべきである。

・非線形構成モデルを利用した数値解析が、実務においても重要な判断材料の一つとなるためには、調査から施工までに存在する不確実性と調和のとれた発展を心がける必要がある。難しい構成モデルの利用が、すぐに技術的判断にいい情報を提供するとは限らない。

参考文献

[1]N. S. Ottosen and M. Ristinmaa: "The Mechanics of Constitutive Modeling",

Elsevier, (2005)
[3]W. F. Chen, D.J. Han:"Plasticity for Structural Engineers", Springer New York, (1988)
[4]G.A.Maugin: "The thermomechanics of plasticity and Fracture", Cambridge University Press, (1992)
[5]J.Lemaitre and J.L.Chaboche: "Mechanics of solid materials", Cambridge University Press", (1990)
[5]M. F. Horstemeyer and D. J. Bammann: "Historical review of internal state variable theory for inelasticity", *Int. J. Plasticity*,Vol. 26, No.9, pp.1310-1334 (2000)
[6]J.デュラン著、中西、奥村共訳：”粉粒体の物理学” 吉岡書店、(2002)
[7]M.Oda and K.Iwashita:"Mechanics of Granular Materials: An Introduction", CRC press, (1999)
[8]X. S.Li, andDafalias,:"Dilatancy for cohesionless soils",*Geotechnique*Vol.50, No. 4, 449-460.,(2000)
[9]John Atkinson:"An Introduction to the Mechanics of Soils and Foundations Through Critical State Soil Mechanics",Mcgraw-Hill International Series in Civil Engineering (1994)
[10]A. Asaoka, M.Nakano, T. Noda,: "Superloading yield surface concept for highly structures soil behavior, *Soils and Foundations*, Col.40, No.2, pp.99-110, (2000)
[11]N. Lu、 W. J. Likos:Unsaturated soil mechanics, Wiley pub. (2008)
[12]飛田善雄（編）：”土の弾塑性構成モデル”、地盤工学会、(2009)
[13]P.Haupt:"Continuum mechanics and theory of materials", Spriger, (2000)
[14]Houlsby G, Puzrin A:"A thermo-mechanical framework for constitutive modelsfor rate-independent dissipative materials", *Int. J. Plasticity*, Vol.16, pp.1017–1047.(2000)
[15]大南正瑛（編）：”マイクロメカニックス入門”、オーム社、(1990)
[16]N.P.KruytandL.Rothenburg:" A micro-mechanicalstudyofdilatancyofgranularmaterials *Journal oftheMechanicsandPhysicsofSolids*, Vol.95, pp.411–427, (2015)
[17]F. Radiai, J. N. Roux, A. Daouadji: ``Modeling of granular materials: Century-long research across scales", *J. Eng. Mech.* ASCE, Vol.143 No.4 (2017), 04017002-1-20
[18]飛田善雄、加茂謙一：”増分非線形モデルの数学的構造・定式化と主応力回転時の挙動の検証、応用力学論文集、土木学会、Vol.5 pp.295-306 (2002)
[19]飛田善雄、山口晶、藤井伸晃、金原瑞男：”工学材料の異方的挙動の簡易な表現方法：修正応力法の地盤材料への適用、応用力学論文集、土木学会、Vol.6、 pp407-418 (2003)
[20]飛田善雄、三塚保法、山口晶、吉田望：”密度と拘束圧依存性を考慮した砂の構成モデルの検証”、応用力学論文集、土木学会、Vol.11 pp.411-422 (2008)
[21]X. S.Li:A sand model with state-dependentdilatancy", *Geotechnique*, Vol.52, No. 3, pp. 173- 186 (2002)
[22]X.S.Li, Y.F. Dafalias:"A constitutive framework for anisotropic sand including non- proportional loading", *Geotechnique*, Vol.54, No.1, pp.41-55,(2004)
[23] X.S. Li, Y.F. Dafalias:" Anisotropic critical state theory: Role of fabric", *J.Eng.Mech.* ASCE, Vol.138, No.3 pp.263-275 (2012)
[24]Z.Gao,J.Zhao:"A non-coaxial critical-state model for sand accounting for fabric anisotropy and fabric evolution, Int.J. Solids and Structures, Vol.106-107,pp.200-212 (2017)