

## 図形の等積変形と外形の動的なイメージ化

### On the Dynamic Imaging of Isosceles Transformation of Figures and Shapes

加藤 卓

KATO Takashi

キーワード：図形，円錐，面積，体積，等積変形，動的イメージ

Key words : Figure, Cone, Area, Volume, Isosceles transformation, Dynamic images

#### 1 問題の所在

教職課程を履修する学生のうち数学・理科を苦手する割合は、約95%以上である。どのような問題が苦手であるかについて簡単なアンケートを行って多く出されるのが、図形の計量や証明である。講義で基本的な図形について復習すると、実際に図形の求積の公式を忘れていた学生がいる。また、数学を苦手とする学生からは、「イメージがわからない。」という声が多く聞かれる。

ところで、1983年、Kaufman Assessment Battery for Children (K-ABC) が、Alan S. Kaufman らにより開発された。この「子供のためのアセスメントバッテリー」は、認知処理過程を継次処理と同時処理の2面から測定することに特徴がある。一人ひとりが持つ認知様式には違いがあるが、通常ならば継次処理と同時処理はバランスよく発達すると考えられている。しかし、LDや発達障害の児童の中には、どちらかに偏りがある場合があることが報告されている（藤田ら、1998）。近年、通常学級には何らかの原因で複数名のLDの児童がおり、特段の配慮と支援が必要になり、児童の認知様式を生かした指導が求められている。

さて、算数・数学での図形の求積指導を概観すると、未知の求積方法を既知の求積方法に結びつける数学的思考が中心となり、次に、まとめあげた公式を用いた求積の習熟学習に移る。認知様式を視点として見直すと、継次処理が多く、各図形の操作は行うものの同時処理は少ないことは否めない。公式の理解を促す図は扱うものの、意味理解をさらに深める等積変形の図までは指導することがほぼ皆無である。特に、等積変形を動的に把握させる面は弱い。そこで、等積変形や外形の動的イメージ力を強化する発展的指導内容を提

案し、同時処理を補強することを考えた。

## 2 研究の目的

図形の求積で、等積変形や外形の動的イメージを強化して獲得させる発展的教育内容を提案し、同時処理の認知処理過程の補強を図ることを目的とする。

## 3 研究内容

図形の求積で、等積変形や外形の動的イメージを強化して獲得させる発展的指導内容・計画を提案する。

## 4 研究方法

算数、数学での図形の求積指導等を精査する。

## 5 求積指導の精査

図形の求積に関して、以下のような少し進んだ指導やイメージ変換を提案する。

### 5-1 平面図形の面積

#### 5-1-1 4学年の面積の学習

4学年の面積の学習では複雑な図形の面積を求める応用問題がある(図1)。解決方略は、「分割・仮定した図形から架空の図形の面積を引く」である。2学年「かけざん」では、応用として、上の問題と同様の並びをしたアレイ図の個数を求める問題がある(図2)が、割り算を学んでいないため、倍積変形後の2分割を指導することには無理がある。近年になって4年生で倍積変形後の2分割も指導するようになった。しかし、解決済みの同じ図形を使った問題であるために解決の必要感があまりない。

加えて、L字型の図形の問題にとどまらず、図3のような階段状の平面図形についても指導を行いたい。階段状の問題をスマートに解決できる大学生は多くないのが実態である。大半の学生の解決方略は、分割・仮定した大きな長方形から架空の面積を引く方略でストップしている。踏面と蹴上がそれぞれ等しければ、どのような階段状の平面図形でも、倍積変形後の2分割が可能である。この問題を考える素地として、 $\sum_{k=1}^{10} a_k = 55$ があり、3学年の算盤で練習する。

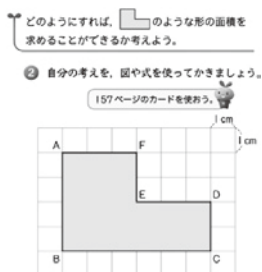


図1 4年

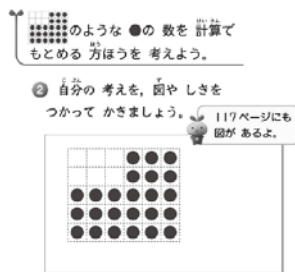


図2 2年

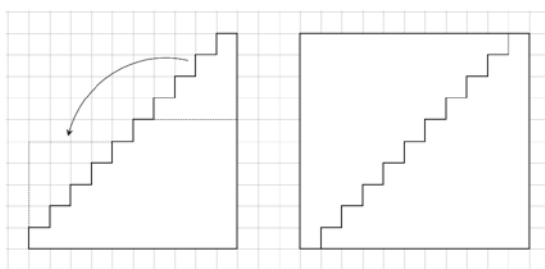


図3 階段状の図形の求積

### 5-1-2 5学年の面積の学習

平行四辺形のまとめでは、「底辺の長さが等しく高さが等しい平行四辺形は、面積が等しい」とされている。しかし、等積でシームレスに変形する平行四辺形のイメージの学習は不足している。図4に示すカヴァリエリの原理を通せば、理解させることは難しくなく、高さが同じ他の平面図形にも敷衍できる。平行四辺形の等積変形のイメージは、図5である。

三角形のまとめでも、同様に等積でシームレスに変形する三角形のイメージと長方形の関係の学習は不足している。それを補うことかできるのは、図6である。

台形も同様に等積でシームレスに変形する台形のイメージと長方形との関係の学習は不足している。また、上底と下底の長さの和を底辺の長さとする三角形ととらえることも不足している。それらを補うのは図7である。なお、台形では、平行線と線分の比を用いて仮定した大きな三角形から架空の三角形を引く方法でも求めることができる。

ひし形では、タコ形が取り上げられるようになったが、1つの対角線に頂点からおろした線が直交する場合も、ひし形の公式で面積を求めることができる。それを補うのは図8である。

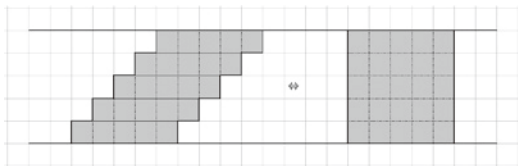


図4 カヴァリエリの原理（面積）

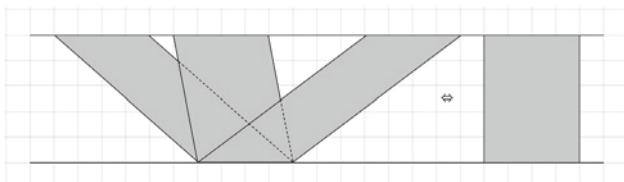


図5 連続で等積変形する平行四辺形と長方形との関係

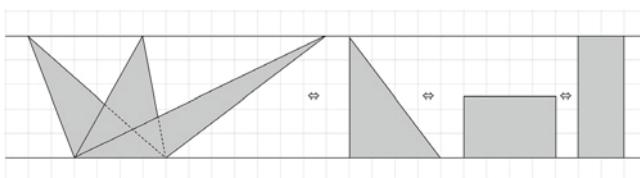


図6 連続で等積変形する三角形と長方形との関係

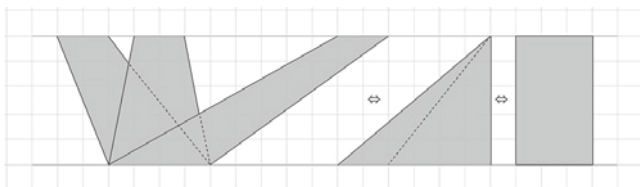


図7 連続で等積変形する台形と三角形・長方形との関係

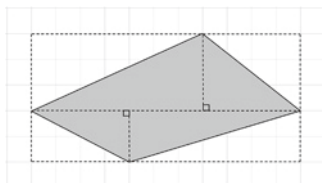


図8 1つの対角線に頂点からおろした線が直交する場合の面積

### 5-1-3 6学年の面積の学習

円については、丁寧で親切な図が多い。円の面積が、半径を1辺とする正方形の約3倍になることは文章では記載されているが、図9のように具体的な図を提示している教科書はほぼない。

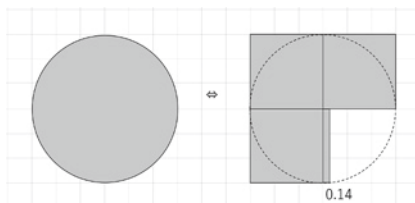


図9 円の面積と半径を1辺とする正方形の関係

## 5-2 立体図形の体積

### 5-2-1 5 学年の学習

直方体と立方体と複合直方体の体積の求め方では、解決方略として、「分割する，分割・仮定した図形から架空の図形の面積を引く，倍積変形後に2分割する」は網羅されている。しかし，平面の場合と同様に，階段状の立体に触れることがないので，一度は経験させた

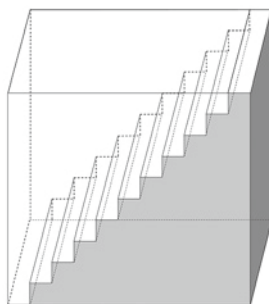


図10 階段状の立体を倍積変形後に2分割して解決

### 5-2-2 6 学年の学習

柱体では，四角柱・三角柱・円柱の直柱体について学習する。平面図形でカヴァリエリの原理について学んでいれば，立体に関しても理解は容易である。

四角柱の斜柱体と直柱体の等積変形の動的イメージ変換を図11に示す。

また，三角柱の斜柱体と直柱体の等積変形，四角柱へのイメージ変換を図12に示す。ツイストした図形の体積は等しく，三角柱は，底面と高さをたて・横とし，高さが1/2の四角柱に等積変形することもできる。

円柱の斜柱体と直柱体の等積変形，四角柱へのイメージ変換を図13に示す。これらの図の斜柱体は，底面に水平である断面積が等しいならば，側面が曲線であっても体積は等しい。

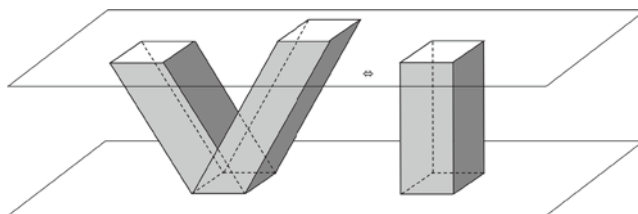


図 11 四角柱の斜柱体と直柱体の等積変形のイメージ

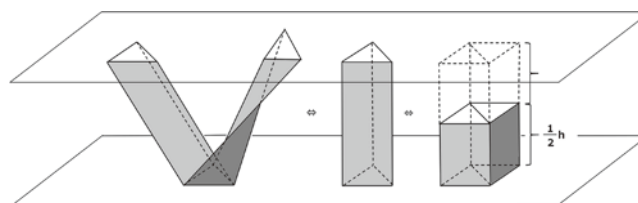


図 12 三角柱の斜柱体と直柱体，四角柱への等積変形のイメージ

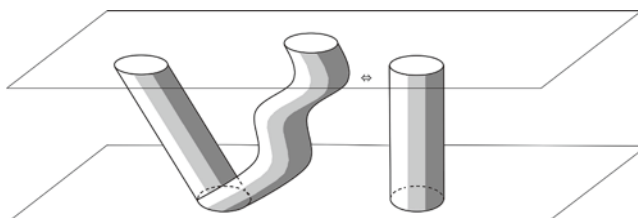


図 13 円柱の斜柱体と直柱体，四角柱等への等積変形のイメージ

### 5-2-3 中学1学年の学習

錐体では，四角錐・三角錐・円錐の直錐体について学習する。錐体についても，平面図形と柱体でカヴァリエリの原理を学んでいれば，等積変形であるという理解は容易である。

四角錐の斜錐体と直錐体の等積変形，直方体へのイメージ変換を図 14 に示す。四角錐は，底面が合同で高さが  $1/3$  の四角柱に等積変形することもできる。

次に，三角錐の斜錐体と直錐体の等積変形，三角柱へのイメージ変換を図 15 に示す。三角錐の場合も，底面が合同で高さが  $1/3$  の三角柱に等積変形することができる。四角柱から切り取った三角錐の体積が，三角柱の  $1/3$ ，四角柱の  $1/6$  であることをイメージすることも容易になる。イメージをつかませておけば，証明の際にも見通しを持って行うことができる。

円錐の斜錐体と直錐体の等積変形，円柱へのイメージ変換を図 16 に示す。円錐も，底面が合同で高さが  $1/3$  の円柱に等積変形することができる。錐体の等積変形のイメージを持っていれば，公式を忘れたとしても再生することが可能である。

球の半径を一辺とする立方体と円柱への等積変形のイメージ変換を図 17 に示す。球の

体積と表面積は、教科書では中央の図を用いて帰納法的に説明なされるが、円の面積に結びつけた右図の提示はほぼない。

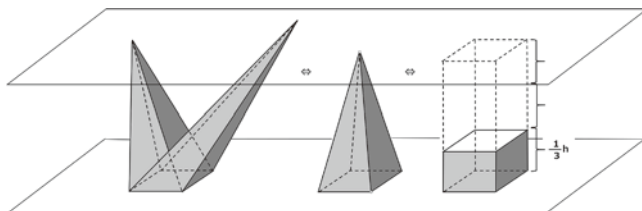


図 14 四角錐の斜錐体と直錐体，四角柱への等積変形のイメージ

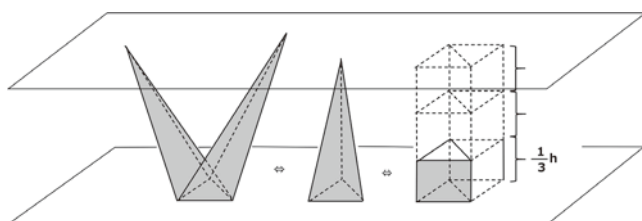


図 15 三角錐の斜錐体と直錐体，三角柱・四角柱への等積変形

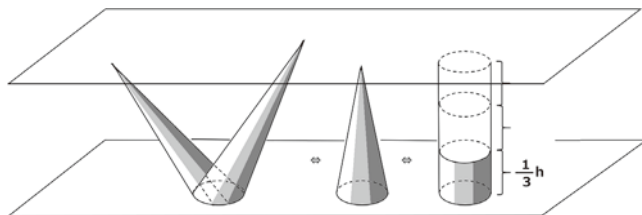


図 16 円錐の斜錐体と直錐体，円柱への等積変形のイメージ

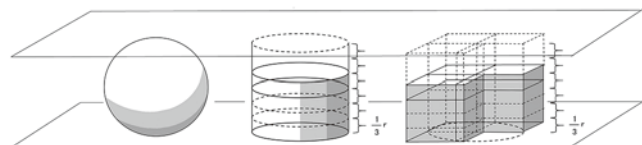


図 17 球と立方体，円柱と立方体への等積変形のイメージ

### 5-3 円錐の形状












円錐の場合、円錐は平面と曲面で構成されているため、生徒は円錐の外形を捉えにくい。展開図では側面が扇型であり、扇形の中心角の大きさと円錐の頂点角に何らかの関係があることはわかるものの、側面の展開図の中心角と投影図の頂点の角度の関係について触れられないことがないため、生徒は側面の形状と円錐の形状の関係を明確に認識することはほぼない。

側面の扇型の半径を  $r$ 、円錐の投影図の頂点の角度の  $1/2$  を  $\theta$ 、投影図の頂点の角度を  $y$  とするとき、 $\sin\theta = \frac{\frac{x}{360} 2\pi r / 2\pi}{r} = \frac{x}{360}$  であり、 $y = 2\sin\theta$  を得る。主な角と形状を一覧に示した表1を見させて、展開図の側面の中心角と三角錐の投影図の頂点の角度は比例関係ではないことと、大まかな照応関係を認識させ、展開図の側面の中心角から円錐の形状を、またその逆を相互にイメージできるようにさせる。投影図の頂点がきりのよい60度になり、真横から見れば正三角形に見えるのは、側面となる扇形の中心角が180度の時だけであることを確認する。

図18の円柱の展開図側面と投影図の角度の関係を表したグラフを見れば、展開図の扇形の中心角が0~210°までは比例に近い振る舞いをし、投影図の頂点の角度は、中心角の約1/3に近い値となる。中心角330°では、投影図の頂点の角度は、中心角の約2/5となり、それ以上の中心角では、投影図の頂点の角度が急速に2Rに近づくとというダイナミックな変化を認識することができる。

イメージ化する図を見せた場合には、その図から何が分かるかについて生徒に発言を促し、明確な発言が無い場合には、解説を加えて確認することが必要である。図を見たばかりでは、理解できない生徒も中には存在するためである。

表1 展開図 側面の扇形の中心角  $x$  と投影図の頂点の角度  $y$  との関係

展開図	側面の扇形の中心角 $x$ (度)	$x$	60	90	120	180	270	360
	側面の形状	-						
投影図	投影図	-						円錐に ならず
	頂点の角度 $y$ (度)	-	約19.2	約29	約38.6	60	約97.2	-
	$\sin\theta$	$\frac{x}{360}$	1/6	1/4	1/3	1/2	3/4	1



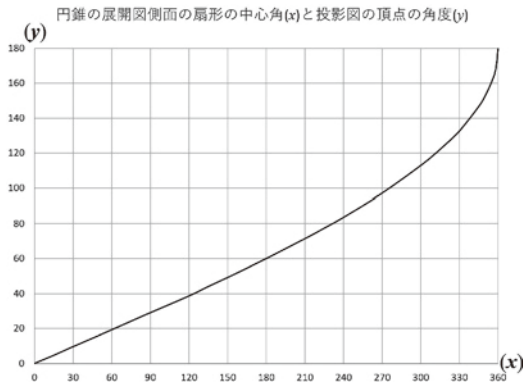


図 18 円錐の展開図側面の中心角と投影図の頂点の角度

#### 5-4 立体の表面積

中学 1 学年での学習の中で、特に、円錐の展開図の形状について取り上げる。円錐の表面積では、展開図の側面の扇形の中心角と底面の円の形状について理解を深めたい。円錐の展開図において、側面となる扇形の弦の長さと同じ長さで底面の円の周は等しい。このとき、側面の扇形の半径を  $R$ 、扇形の中心角を  $x$ 、底面の円の半径を  $r$  とすると、 $\frac{x}{360} \times 2\pi R = 2\pi r$  であるので、 $\frac{x}{360} R = r$  となる。展開図の半径  $R$  の側面の中心角  $x$  と底面の半径  $r$  との関係を表したのが表 2 である。また、半径側面の扇形の中心角と側面と底面の半径の相対関係を連比で表すと、 $360 : x = R : r$  となる。

展開図において、360 に対する側面の中心角  $x$  の割合に比例して、底面の半径  $r$  が側面の半径  $R$  のどれだけになるかをイメージ化できる。ここでは、底面の半径  $r$  が側面の半径

表 2 展開図 半径  $R$  の側面の中心角  $x$  と底面の半径  $r$  との関係

側面	扇形の中心角 $x$ (度)	$x$	60	90	120	180	270	360
	半径 $R$ の形状	-						
底面	底面の大きさ	-						
	底面の半径 $r$	$\frac{x}{360} R$	$\frac{1}{6} R$	$\frac{1}{4} R$	$\frac{1}{3} R$	$\frac{1}{2} R$	$\frac{3}{4} R$	円錐にならず

$R$ の半径同士で比較しているが、直径同士でも同じ関係になる。側面の扇形の中心角の大きさは、分割分数で考えれば一目瞭然であるので、直感的に理解しやすい。展開図が扇形や円で立体が曲面で構成される円錐は、生徒にとって認識が特に難しい。求積の際に不可欠な展開図の形状や円錐の外形は、イメージがモヤモヤしがちであるが、認識をより明確にする手立てを示した。

なお、ここでは斜柱体と斜錐体は取り上げなかったが、一般に斜錐体は直柱体より、斜錐体は直錐体より表面積が大きくなる。

## 6 求積に関するイメージ力を強化する発展的指導内容と計画のまとめ

他の複雑な立体として、角錐台や円錐台、中空の柱体や錐体、中空球もあるが、求積方法は、仮定した大きな全体から架空の部分を引くという考え方であるので、方略としては難しくない。

時間制限のある学力テストや各種試験の場合、公式に値を代入して求める解法など形式

表3 求積に関するイメージ力を強化する発展的指導内容の一覧

校種	学年	計算	(表)面積	体積	外形
小学校	3	$\sum_{k=1}^{10} a_k = 55$ の計算の工夫	—	—	—
	4	—	・階段状の図形の求積のイメージ化	—	—
	5	—	・平行四辺形、三角形、台形について、カヴァリエリの原理により、動的な等積変形のイメージ化 ・1つの対角線に頂点からおろした線が直交する特殊なタコ型の求積のイメージ化 ・円の面積の公式のイメージ化	・階段状の立体について、倍積変形後に2分割する方法のイメージ化	—
	6	—	—	・柱体について、カヴァリエリの原理により、斜柱体を含む動的な等積変形のイメージ化	—
中学校	1	—	・円錐の展開図において、側面となる扇形の中心角と底面の大きさの相互のイメージ化	・錐体について、カヴァリエリの原理により、斜錐体を含む動的な等積変形のイメージ化 ・円の公式をもとにした球の体積のイメージ化	・円錐の展開図において、側面となる扇形の中心角と円錐の形状の相互のイメージ化

操作を行う方が有利である。しかし、暗記した公式は忘れやすい。意味の理解やイメージの獲得がない学習では、公式の意味が理解できず、また再生は困難となるだろう。

## 7 成果と課題

成果を以下にまとめる。

○小学校・中学校での平面図形と立体図形の求積の学習においての、動的なイメージの発展的指導内容を具体的に提示した。

○円錐について、側面の扇形の中心角と円錐の頂点の形状の関係、側面の扇形の中心角と底面の円の大きさの関係を、動的にイメージ化する発展的指導内容を具体的に提示した。

課題を以下に記載する。

- ・動的なイメージ化を経験させることによって、どの程度忘却しにくくなるか、フィールドでの検証が必要である。

## 参考文献・引用文献

- [1] Alan S. Kaufman & Nadeen L. Kaufman, “Kaufman Assessment Battery for Children”, 1983
- [2] 岡森博一・鈴木正彦, 「立体を追う」中学生の数学ライブラリー・22, 岩崎書店, 1978
- [3] 藤田和弘・青山真二・熊谷恵子, 「長所活用型指導で子どもが変わる」, 図書文化社, 1998
- [4] 藤井齊亮ほか, 「R2 指導者用デジタル教科書 小学校算数 2」, P43, 東京書籍, 2020  
藤井齊亮ほか, 「R2 指導者用デジタル教科書 小学校算数 4」, P69・P80, 東京書籍, 2020  
藤井齊亮ほか, 「R2 指導者用デジタル教科書 小学校算数 5」, 東京書籍, 2020  
藤井齊亮ほか, 「R2 指導者用デジタル教科書 小学校算数 6」, 東京書籍, 2020  
[http://webworld.tokyo-shoseki.co.jp/?action\\_Contents\\_contentsList=true](http://webworld.tokyo-shoseki.co.jp/?action_Contents_contentsList=true) (閲覧日: 2020年12月25日)
- [5] 岡本和夫ほか, 「未来へひろがる 数学 1」, 株式会社新興出版社啓林館, 2016
- [6] 藤井齊亮ほか, 「新編 新しい数学 1」, 東京書籍株式会社, 2016
- [7] 一松信ほか, 「中学校 数学 1」, 学校図書株式会社, 2016
- [8] 相馬一彦ほか, 「数学の世界 1年」, 大日本図書株式会社, 2016